一维 Logistic 模型混沌特性的研究

李博斌 1)†

1)（兰州理工大学理学院，物理系，兰州 730050）

摘 要

一维 Logistic 模型广泛存在于社会和自然演化过程中，是一类非常具有代表性的简洁非线性模型. 本工作主要通过数值模拟研究一维 Logistic 模型的非线性特征与混沌特性，进而分析混沌一般性特点. 在一维 Logistic 模型中，在环境参数取不同值时，该模型表现出许多迥异代演化行为.其从一个完全可预测的周期性行为变成完全不可预测的混沌行为，表现倍周期分叉的混沌现象和初值敏感特性.

关键词：Logistic 模型　混沌特性　数值分析

PACS：05.45.Pq，05.45.Tp，05.45.-a

† 通讯作者.E-mail: gslibobin@lut.edu.cn

1 引 言

在自然界之中,在特定的空间和自然资源的制约下,种群数量的随时间的演化,往往蕴含着极其无序的演化规律.同样,在社会模型之中,同样存在混沌的情况.,属于[0,4]，属于(0,1)。这是 1976 年数学生态学家 R. May 在英国的《自然》杂志上发表的一篇后来影响甚广的综述中所提出的,最早的一个由倍周期分岔通向混沌的一个例子. Logistic 模型是由数学生物学家 Pierre-Francois Verhulst 在 1838 年提出的世界人口增长模型，从该模型问世以来，它的应用从人口增长的生物种群模型拓展到很多领域，广泛应用于生物学、医学、经济学和管理学等方面.

Yu 等人[1]分别得到了方程[2]的所有解都与分数阶 logistic 方程有关的充分条件。Oruganti 等人[3]考虑一个反应-扩散方程，该方程模拟了满足 logistic 方程增长的空间异质性种群的恒定产量收获。文献[4]研究了一个具有异质环境和自由边界的扩散 logistic 方程，该方程是为了研究入侵物种的传播而制定的，其中自由边

界代表扩张前沿。Izadi 等人[5]的主要贡献是通过开发基于分数阶 Bessel 和 Legendre 函数的搭配方法获得分数阶非线性 Logistic 方程的近似解。种群动力学模型包括捕食者-猎物问题和 logistic 方程，利用分数算子对 Caputo-Fabrizio 导数进行了推广[6]。其他有影响力的工作包括 Gopalsamy 等人的工作[7,8]、Cambel 的工作[9]以及 Ahmad 的工作[10]和其他工作[11,12]。本文详细的分析了 Logistic 模型演化的细节特征以及对初值敏感的混动特性，详细的分析了 Logistic 模型作为一个混沌模型的动力学特性.

2 一维 Logistic 模型介绍

一维Logistic方程$x(k+1)=a\cdot x(k)\cdot(1-x(k))$是描述虫口模型的广泛使用的关系.其中 $x\in(0,1)$,而 $a\in(0,4)$.其中 $x(k)$代表种群第 k 代的数量,而 k 代表种群的代数.a 是描述种群生存环境压力的环境参数.

3 结果与讨论

3.1 一维 Logistic 模型的不同参数取值的数值分析

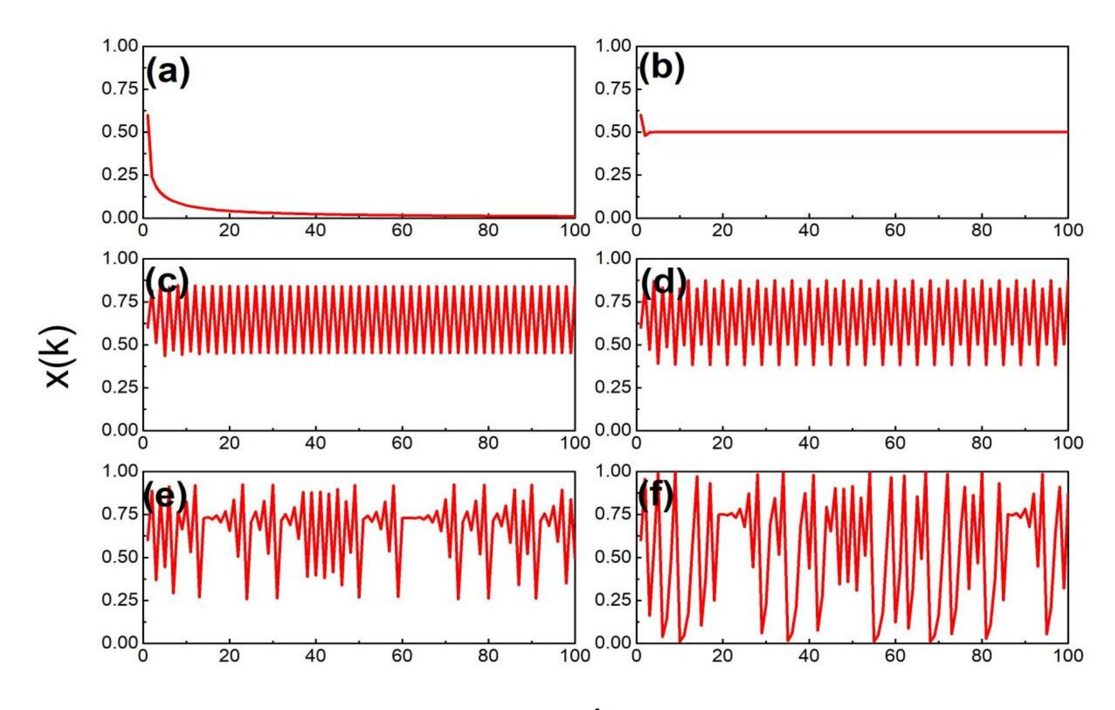


图1 不同环境参量 a 下种群数量 x(k)随种群代数 k 的变化关系 (a) $a\in(0,1)$.(b) $a\in(1,2)$. (c) $a\in(3,3.4495)$. (d) $a\in(3.4496,3.5441)$. (e) $a\in(3.5441,4)$. (f) $a\in(3.5441,4)$

FIG. 1. Under different environmental parameters, the relation between population number $x(k)$ and population generation k. (a) $a\in(0,1)$.(b) $a\in(1,2)$. (c) $a\in(3,3.4495)$. (d) $a\in(3.4496,3.5441)$. (e) $a\in(3.5441,4)$. (f) $a\in(3.5441,4)$

中从图 1(a)描述种群演化在环境参量 a 在范围(0,1)之间时,种群的数量是消亡的态势,表面此时种群对于外界环境完全无法适应或者外界环境压力过大.而图 1(b)描述环境参量 a 在范围(1,2)之间时的状态,种群对于环境的适应需要一个开始的的低谷之后恢复到正常,这类似于在发酵工程中,细菌菌种在培养液中的繁殖曲线.图 1(c)描述种群在环境参数 a 范围(3, 3.4495)内是,种群的演化状态.可以见到种群的数量随着代数的增加表现出激烈的震荡向下,这具体表现为种群繁殖所需的生存资料的产生和消耗之间有一个周期变化的过程,从而导致种群数量的振荡.图 1(d)描绘参数 a 范围(3.4496, 3.5441)内的情况.种群变化趋势仍然表现振荡,但是出现振荡周期变长的现象.图 1(e) 和图 1(f) 描述种群在环境参数 a 范围(3.5441, 4)内,种群的演化状态.可以见到种群的数量随着代数的增加表现出激烈的震荡,但是这种振荡失去了原来的的周期性,变得无规与混乱.在后面的分岔图中我们将看到此时系统处于完全混沌的状态.

3.2 一维 Logistic 模型的混沌特性的数值分析

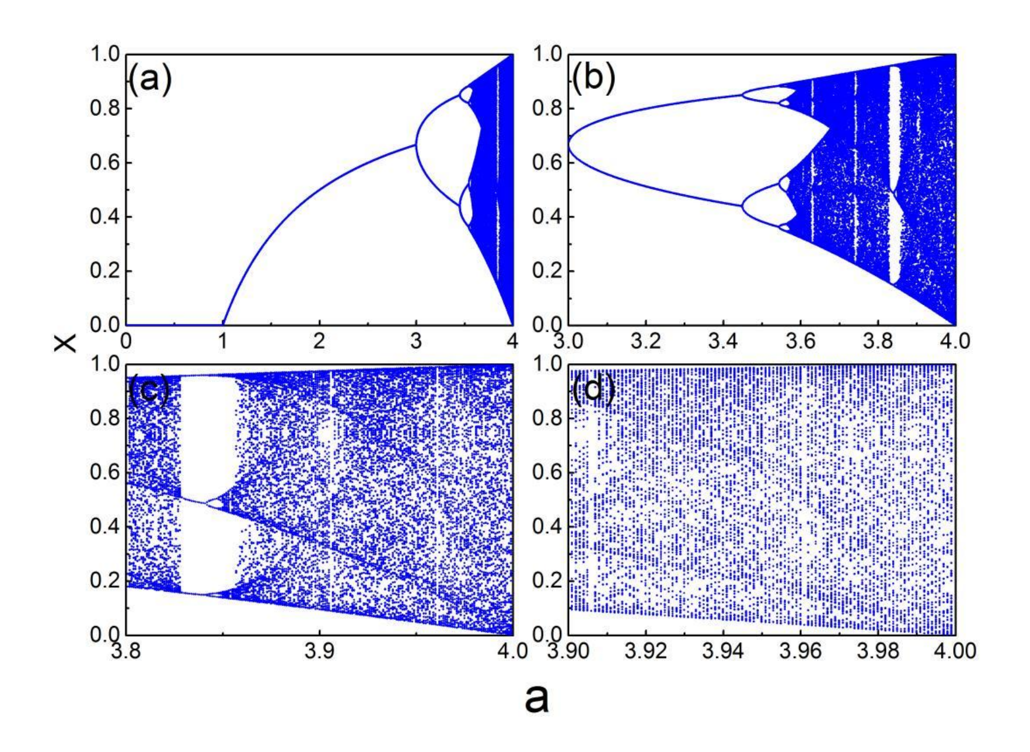


图 2 种群长时间演化数量状态 x 与环境参数 a 关系图 (a) $0 < a < 4$. (b)$3.0 < a < 4$. (c)$3.8 < a < 4$. (d) $3.9 < a < 4$

FIG. 2. The relation between long-term evolution of population x and environmental parameters a (a) $0 < a < 4$. (b)$3.0 < a < 4$. (c)$3.8 < a < 4$. (d) $3.9 < a < 4$

中在图 2 之中,明显的描绘出了系统走向混沌的全部过程,即倍周期分叉的现象.系统的不确定度的来源也是这些倍周期分叉的结果.在混沌区,我们仍然可以看到由周期系统组成的空白区.在混沌的放大区,图 2 表述出了混沌的细节特点,即倍周期分叉.

3.3 一维 Logistic 模型的混沌特性初值的敏感性分析

我们前面已经得到一维 logistic 模型的混沌行为描述.我们知道混沌一般就有初值敏感性. 所以我们现在通过数次迭代得到一维 logistic 模型的初值敏感性特性.我们取系统处于混沌范围的环境参量 $a = 3.8$,从图 2 中可以明显的看出系统处于混

沌的状态. 若把几幅图同时画到同一个坐标轴上,则得到图 3

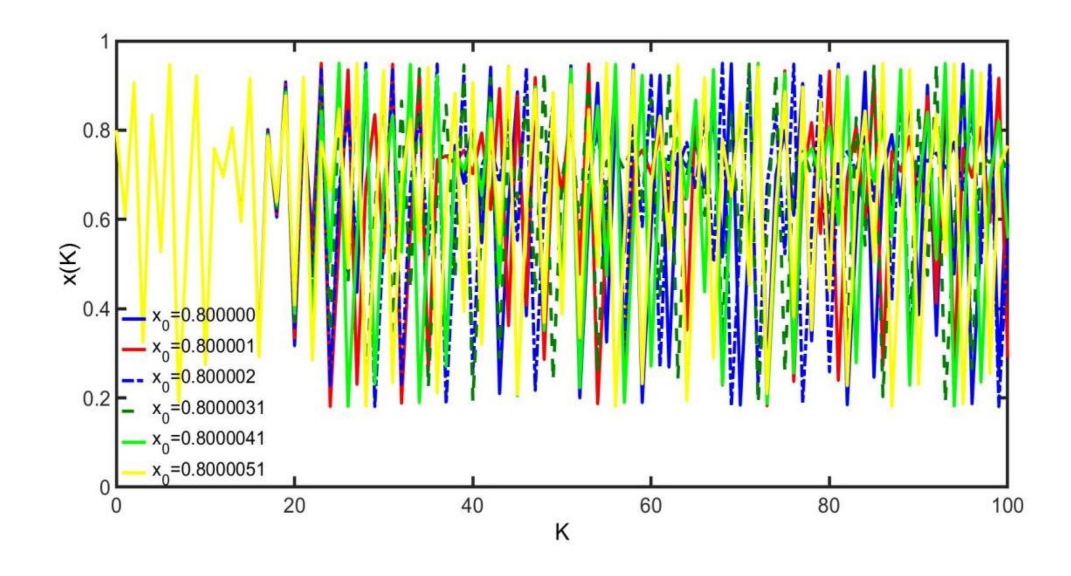


图 3: 初值敏感的一维 Logistic 模型演化图，环境参数设置 $a = 3.8$

FIG. 3. Initial value sensitive Logistic model evolution diagram, environmental parameter $a = 3.8$

我们看到在初始值相差非常小时,在种群的代数不是非常大时.种群演化数量是相同的,前面的几条线几乎是重合的.但是随着演化代数的增加,重合的几条曲线开始分离,并按照完全不同的演化路径进行演化.表现出明显的初值敏感性.表面在一维 logistic 模型之中确实存在系统本质性的混沌性质.

4 结论

从数值模拟的角度出发,研究在非线性的一维 logistic 模型中的演化行为.在环境参量变大到一定程度时,其实混沌行为的开始并无明显的界限,而是系统不断地倍周期的分叉,最终走向完全无法预测的混沌. 对于这些混沌的区域, 所有的决定论的想法完全不适用. 但是通过模型的行为分析, 发现在系统处于完全混沌的区域时,系统也有有序的区域存在. 在分岔图中表现为在混沌区有几条分离的空白窗口,在这些区域, 系统的行为同样是可预测的周期或者准周期. 但是随着环境

参量的变化，系统的行为又变得不可预测和混沌.

在一个在混沌区系统表现出非常明显的初值敏感性,对于非常小的差异,系统均将在足够长的演化代数之下最终将变得完全不同. 初值非常小的差异将导致系统非常不同迥异的行为，表现出混沌的一般特征.

从分析中表现出，作为非线性模型代表的 logistic 模型，有着与线性模型迥异的行为特征. 非线性模型有着丰富的演化行为以及混沌行为，这些性质中线性系统不会出现。本工作主要通过数值模拟得到的结论，如何通过解析手段研究非线性模型这些特征，仍旧是非常大的一个挑战。以及不可预测的混沌特性的解析描述同样是一个非常大理论问题，有待后续的研究。

参考文献

[1] JS Yu, Bo Zhang, ZC Wang 1994 *APPLICABLE ANALYSIS*, 53,1-2:117-124

[2] Ahmed MA El-Sayed, AEM El-Mesiry, HAA El-Saka 2007 *APPL. MATH. LETT.* 20,7: 817-823

[3] Shobha Oruganti, Junping Shi, Ratnasingham Shivaji 2002 *TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY,* 354: 3601-3619

[4] Mingxin Wang 2014 *arXiv:1404.4565*

[5] Mohammad Izadi, HM Srivastava 2021 *CHAOS SOLITONS & FRACTALS*, 145, 110779.

[6] H Jafari, RM Ganji, NS Nkomo, YP Lv 2021 *RESULTS IN PHYSICS*, 27, 104456.

[7] K Gopalsamy, BG Zhang 1988 *DYNAMICS AND STABILITY OF SYSTEMS*, 2,3-4: 183-195

[8]K Gopalsamy. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics[M]. 1992, ISBN: 978-94-015-7920-9

[9] Ali Bulent Cambel. Applied Chaos Theory: A Paradigm for Complexity[M].1992, ISBN:0121559408

[10] Shair Ahmad 1993 Proceedings of the American mathematical society, 117, 1

[11] Bahman P Tabaei, William H Herman 2002 *DIABETES CARE*, 25(11):1999-2003.

[12] Daqing Jiang, Ningzhong Shi, 2005 *JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS*, 303,1: 164-172

The chaotic characteristics of one-dimensional Logistic model

Li Bobin[1) †]

1) (Department of Physics, School of science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract

One-dimensional logistic models are a common type of simple nonlinear model found in both social and natural evolutionary processes. Through numerical simulation, this paper primarily examines the nonlinear and chaotic properties of a one-dimensional logistic model before analyzing the general properties of chaos. When the environmental parameters are changed in a one-dimensional logistic model, the model exhibits a wide range of generational evolution patterns. The chaotic phenomena of period-doubling bifurcation and starting value sensitivity are demonstrated as it transitions from a predictable periodic activity to a wholly unpredictable chaotic behavior.

Keywords: Logistic model, Chaotic characteristics, Numerical analysis